Департамент образования и науки Костромской области

областное государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«КОСТРОМСКОЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

Методический конкурс педагогических работников образовательных организаций Костромской области

Номинация: дидактические материалы для обучающихся

Лапшина И.В.

Методические указания по выполнению практических занятий по учебной дисциплине «Численные методы»

Кострома 2025

Лапшина И.В.**Методические указания по выполнению практических занятий по учебной дисциплине «Численные методы».** РИК ОГБПОУ «Костромской политехнический колледж» - 2025, 46 с.

Методические указания по выполнению практических занятий по дисциплине «Численные методы»предназначены для закрепления теоретических знаний, полученных на лекциях, а также для овладения студентами умений и навыков применять эти знания при самостоятельной работе. Перечень практических занятий соответствует рабочей программе по дисциплине «Численные методы».

Рецензент: Корольков Д.А. – Инженер по автоматизированному тестированию Общество с ограниченной ответственностью «РТК- Медлайн», г. Кострома

Гарнитура шрифта «Times New Roman Cyr» 14 п., 12п.
Формат 60х84/62. Кол-во листов 62. Кол-во авт.листов 1,5.
РИК КПК
Файл «РИК\Документы\.2025\Методички\Chislennie metodi»

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Выполнение студентами практических работ по дисциплине проводится с целью:

– закрепления полученных теоретических знаний по дисциплине «Численные методы»;

– углубления теоретических знаний в соответствии с заданной темой;

– формирования умений решать практические задачи;

– развития самостоятельности, ответственности и организованности;

– формирования активных умственных действий студентов, связанных с поисками рациональных способов выполнения заданий.

Методические указания выполняют функцию управления самостоятельной работой студента, поэтому каждое занятие имеет унифицированную структуру, включающую определение целей занятия, оснащения занятия, порядок выполнения работы, а также задания и контрольные вопросы для закрепления темы.

Содержание заданий практической работы ориентировано на подготовку студентов к освоению профессиональных модулей ОПОП по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование (базовой подготовки) и овладению профессиональными компетенциями:

ПК 1.1. Формировать алгоритмы разработки программных модулей в соответствии с техническим заданием.

ПК 1.2. Разрабатывать программные модули в соответствии с техническим заданием.

В процессе освоения дисциплины у студентов должны формироваться общие компетенции:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 2. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретация информации, и информационные технологии выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 9. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен

уметь:

- использовать основные численные методы решения математических задач;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата.

знать:

– методы хранения чисел в памяти ЭВМ и действия над ними, оценку точности вычислений, т.е. действия над приближенными числами;

– методы решения основных математических задач – интегрирования, дифференцирования, решения линейных и трансцендентных уравнений и систем уравнений с помощью компьютера.

В методических указаниях приведен теоретический (справочный) материал в соответствии с темой занятия, обращение к которому поможет выполнить задания практической работы.

1. Практическая работа №1.

Вычисление погрешностей величин и результатов арифметических действий

Цель занятия:

- Закрепить навыки вычисления погрешностей результатов арифметических операций;
- Закрепить способности определять количество значимых цифр в числе, а также вычислять относительные и абсолютные погрешности.

Краткие теоретические сведения.

Пусть *X*- точное значение некоторой величины, а *x*–наилучшее из известных приближений. В этом случае погрешность (или ошибка) приближения *x* определяется разностью *X-x.* Обычно знак этой ошибки не имеет решающего значения, поэтому рассматривают ее абсолютную величину $e_x = |X - x|$.[1]

Определение: *Абсолютной погрешностью* приближенного значения числа X называется модуль разности между точным числом X и его приближенным значением x [1]

Точное значение *X*как правило неизвестно, и, следовательно, Δ - так же остается неизвестным. В связи с этим используется оценкадля Δ, называемая предельной абсолютной погрешностью.

Определение: *Предельной абсолютной погрешностью приближенного числа x* называется число Δ*x* такое, что $\Delta \le \Delta x$. Таким образом, $|X - x| \le \Delta x$. В качестве Δ*x*берут как можно меньшее и в тоже время простое по записи число Δ*x.*[1]

Определение: Число Δx называется *границей абсолютной погрешности* приближённого значения числа x.[1]

Абсолютная погрешность не всегда позволяет полностью оценить точность измерений или вычислений. Качество приближения лучше всего характеризуется *относительной погрешностью,* которая определяется как отношение ошибки e_xк модулю значения X (когда оно неизвестно, то к модулю приближения x). [1]

Определение: *Предельной относительной погрешностью* (или *границей относительной погрешности)* δx приближенного числа называется отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютному значению приближения x:

$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}$.[1]

Данная формула позволяет выразить абсолютную погрешность через относительную: $\Delta x = |X| \cdot \delta x$

Относительную погрешность обычно выражают в процентах.Чем меньше относительная погрешность числа, тем выше качество измерений или вычислений.

Пример: Определить предельные погрешности числа x=3,15 как приближенного значенияX=3.1511111.

По определению предельной абсолютной погрешности получаем $|3{,}1511111 - 3{,}15| < 0{,}0011111 < 0{,}0012$..

По формуле связи получаем:$\frac{0{,}0012}{3{,}15} < 0{,}00038$.

Таким образом, предельная абсолютная погрешность будет равна$\Delta x = 0{,}0012$,а предельная относительная погрешность $\delta x = 0{,}00038 = 0{,}038\%$.

Определение: *Значащими цифрами* в записи числа называются все цифры в его десятичном изображении, отличные от нуля, и нули, если они расположены между значащими цифрами или стоят в конце для выражения верных знаков.[1]

Пример: в числах $47{,}20 \cdot 10^5$ и 0,005308 имеется по 4 значащих цифры.

В числе 47,20 это числа 4,7,2,0.

В числе 0,005308 это 5,3,0,8. Т.е. первые 0 не являются значащими.

Определение: Цифра числа называется *верной в строгом смысле,* если абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы разряда, в котором стоит эта цифра. [1]

Определение: Цифра называется *верной в широком смысле,* если абсолютная погрешность этого числа не превышает единицы разряда, в котором стоит эта цифра. [1]

Правила записи приближенных чисел

1. Приближенные числа записываются в виде: $x \pm \Delta x.$ Запись $X = x \pm \Delta x.$ означает, что неизвестная величина X удовлетворяет следующим неравенствам: $x - \Delta x \le X \le x + \Delta x.$ При этом погрешность Δx следует подбирать так, чтобы:

a) В записи Δx было не более 1 -2 значащих цифр;

b) Младшие разряды в записи чисел x и Δx соответствовали друг другу.[1]

Пример: 24,5±0,3 , 2,640±0,018 , -5,87±0,20.

2. Приближенное число может быть записано без явного указания его предельной абсолютной погрешности, но, в этом случае, в его записи должны присутствовать только верные цифры в широком смысле, если не указано обратное. В этом случае по записи числа можно судить о его точности.[1]

Пример: Если в числе А=2,6 все цифры верны в строгом смысле, тогда ΔA=0,05.

Если число В=1,3, то это означает, что его предельная абсолютная погрешность ΔB=0,1.

Если С = 1,300, то его предельная абсолютная погрешность ΔС=0,001.

Определение: Цифры в записи приближенного числа, о которых нам не известно, верны они или нет, называются *сомнительными.* [1]

В промежуточных результатах сохраняют одну или две сомнительные цифры, чтобы обеспечить точность вычислений. После этого в окончательном результате они отбрасываются, если результат не будет использоваться в дальнейших расчетах.

Округление чисел

1. Правило округления.

- Если первая из отделяемых цифр больше, чем число 5, то последняя из оставляемых цифр усиливается, иначе говоря, увеличивается на единицу. Усиление так же предполагается и тогда, когда первая из убираемых цифр равна 5, а за ней имеется одна или некоторое количество значащих цифр.[1]

Пример: Число 47,872 округлённо записывается как – 47,9. В данном случае цифра 8 будет усилена до 9, так как первая отсекаемая цифра 7, больше чем 5.

Пример: Число 63,254 округлённо записывается как – 63,3. Здесь цифра 2 будет усилена до 3, так как первая отсекаемая цифра равна 5, а за ней следует значащая цифра 4.

- В случае если первая из отсекаемых цифр меньше чем 5, то усиления не производится.[1]

Пример:Число 426,48 округлённо записывается как – 426. Число 426 наиболее близко к округляемому числу, чем 427.

- Если отсекается цифра 5, а за ней не имеется значащих цифр, то округление выполняется на ближайшее четное число, другими словами, последняя оставляемая цифра остаётся неизменной, если она четная, и усиливается в случае, если она нечетная.[1]

Пример:Число 0,0265 округлённо записывается как – 0,026. В данном случае усиления не делается, так как последняя оставляемая цифра 6 является чётной.

Пример: Число 0,735 округлённо записывается как – 0,74. Последняя оставляемая цифра 3 усиливается, так как она является нечётной.

2. При округлении числа, записанного в форме $x \pm \Delta x$, его предельная абсолютная погрешность увеличивается с учетом погрешности округления.[1]

Пример: Округлим до сотых число 4,5371±0,0482.

Запись 4,54±0,05 будет не верной, так как погрешность округленного числа складывается из погрешности исходного числа и погрешности округления. В данном случае она равна 0,0482 + 0,0029 = 0,0511. Округлять погрешности всегда следует с избытком, поэтому окончательный ответ: 4,54±0,06.

Оценка погрешности приближенных вычислений

Учет погрешностей арифметических действий

1. Сложение и вычитание.

Предельной абсолютной погрешностью алгебраической суммы является сумма соответствующих погрешностей слагаемых [1]:

Ф.1:
$$\Delta(X+Y) = \Delta X + \Delta Y$$
$$\Delta(X-Y) = \Delta X + \Delta Y\ .$$

Пример: Даны приближенные числа x=2,64 и y=14,3, все цифры верны в строгом смысле. Найти Δ(x-y)и $\delta(x\text{-}y)$.

Решение:

По формуле Ф.1 получаем Δ(x-y)=0,005+0,05=0,055. Относительную погрешность получим по формуле связи:

$$\delta(x-y) = \frac{\Delta(x-y)}{|x-y|} = \frac{0{,}055}{11{,}66} \approx 0{,}0047 = 0{,}47\%.$$

2. Умножение и деление.

Если $\delta x << |x|$ и $\delta y << |y|$, то имеет место следующая формула [1]:

Ф.2
$$\delta(xy) = \delta\left(\frac{x}{y}\right) = \delta x + \delta y.$$

Пример: Найти $\Delta(xy)$ и $\delta(xy)$ для чисел из предыдущего примера.

Решение:

Сначала с помощью формулы Ф.2 найдем $\delta(xy)$:

$$\delta x = \frac{0{,}005}{2{,}64} = 0{,}0019, \delta y = \frac{0{,}05}{14{,}3} = 0{,}0035,$$

$$\delta(xy) = \delta x + \delta y = 0{,}0019 + 0{,}0035 = 0{,}0054.$$

Теперь с помощью формулы связи найдем $\Delta(xy)$:

$$\Delta(xy) = |xy| \cdot \delta(xy) = |2{,}64 \cdot 14{,}3| \cdot 0{,}0054 = 0{,}21.$$

3. Возведение в степень и извлечение корня.

Если $\delta x << |x|$, то справедливы следующие формулы [1]:

Ф.3 $$\delta\left(x^n\right) = n\delta x, \qquad \delta\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{\delta x}{n}.$$

4. Функция одной переменной.

Пусть даны аналитическая функция *f(x)* и приближенное число $c \pm \Delta c$. Если Δc достаточно мала, то верна следующая формула [1]:

Ф.4 $$\Delta f(c) = |f'(c)| \cdot \Delta c.$$

5. Функция нескольких переменных.

Для функции нескольких переменных $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при $x_k = c_k \pm \Delta c_k$ справедлива формула, аналогичная Ф.4 [1]:

Ф.5 $$\Delta f(c_1, c_2, ..., c_n) \approx |df(c_1, c_2, ..., c_n)| = \left|f'_{x_1}(c_1)\right| \cdot \Delta c + \left|f'_{x_1}(c_n)\right| \cdot \Delta c_n.$$

Методы оценки погрешности приближенных вычислений[1]

1. Строгий метод итоговой оценки.

Если приближенные вычисления выполняются по сравнительно простой формуле, то с помощью формул Ф.1 - Ф.5 и формул связи погрешностей можно вывести формулу итоговой погрешности вычислений. Вывод формулы и оценка погрешности вычисленной с ее помощью составляет суть данного метода.

2. Метод итогового пооперационного учета погрешностей.

В случае, когда метод итоговой оценки приводит к сложной формуле, более целесообразным, является применение данного метода. Он заключается в том, что оценивается точность каждой операции вычислений отдельно с помощью тех же формул Ф.1 - Ф.5 и формул связи.

3. Метод подсчета верных цифр.

Данный метод является нестрогим, так как оценка точности, которую он дает, в принципе ж гарантирована, но практике является довольно надежной. Суть метода заключается в том что после каждой операции вычислений в полученном числе определяется количество верных цифр с помощью следующих правил:

П1: При сложении и вычитании приближенных чисел в результате верными следует считать те цифры, десятичным разрядам которых соответствуют верные цифры во всех слагаемых Цифры всех других разрядов кроме самого старшего из них перед выполнением сложения или вычитания должны быть округлены во всех слагаемых [1].

П2: При умножении и делении приближенных чисел в результате верными следует считать столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим количеством верных значащих цифр. Перед выполнением этих действий среди приближенных данных нужно выбрать число с наименьшим количеством значащих цифр и округлить остальные числа так, чтобы они имели лишь на одну цифру больше него [1].

П3: при возведении в квадрат или куб, а также при извлечении квадратного или кубического корня в результате следует считать верными столько значащих цифр, сколько имелось верных значащих цифр в исходном числе [1].

П4: Количество верных цифр в результате вычисления функции зависит от величины модуля производной и от количества верных цифр в аргументе. Если модуль производной близок к числу 10^k(k- целое), то в результате количество верных цифр относительно запятой на kменьше (если k-отрицательно, то - больше), чем их было в аргументе. Модуль производной близок к 10^k, если имеет место неравенство: $0{,}2 \cdot 10^k < |f'(x)| \le 2 \cdot 10^k$.[4]

Или При определении количества верных цифр в значениях функций от приближённых значений аргумента следует грубо оценить значение модуля производной функции. Если это значение не превосходит единицы или близко к ней, то в значении функции можно считать верными столько знаков после запятой, сколько их имеет значение аргумента. Если же модуль производной функции превосходит единицу, то количество верных десятичных знаков в значении функции меньше, чем в аргументе на величину, равную разряду оценки производной [1].

П5: В промежуточных результатах помимо верных цифр следует оставлять одну сомнительную цифру (остальные сомнительные цифры можно округлять) для сохранения точности вычислений. В окончательном результате оставляют только верные цифры [1].

Правила подсчёта цифр носят оценочный характер, но практическая надёжность этих правил достаточно высока.

При исследовании данного метода используется расчётная таблица – расписка формул.

Пример: Произвести оценку вычислений

1) строгим методом итоговой оценки: $f(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{y}\right)$, прих=5,6, y=6,82.

Решение:

$$\Delta f(x,y)=\left(\ln\left(x+\sqrt{y}\right)\right)'_x\cdot\Delta x+\left(\ln\left(x+\sqrt{y}\right)\right)'_y\cdot\Delta y=\frac{1}{x+\sqrt{y}}\cdot\Delta x+\frac{1}{x+\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\Delta y+=$$

$$=\frac{1}{5{,}6+\sqrt{6{,}82}}\cdot 0{,}05+\frac{1}{5{,}6+\sqrt{6{,}82}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{6{,}82}}\cdot 0{,}005=\frac{1}{5{,}6+2{,}6115}\cdot 0{,}05+\frac{1}{5{,}6+2{,}6115}\cdot\frac{1}{2\cdot 2{,}6115}\cdot 0{,}005=$$

$$=\frac{1}{8{,}2115}\cdot 0{,}05+\frac{1}{8{,}2115}\cdot\frac{1}{5{,}223}\cdot 0{,}005=0{,}0061+\frac{0{,}005}{42{,}889}=0{,}0061+0{,}00012=0{,}00622$$

$$f(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{y}\right)=\ln\left(5{,}6+\sqrt{6{,}82}\right)=\ln(5{,}6+2{,}6115)=\ln 8{,}2115\approx 2.10554.$$

Таким образом, получаем, $f(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{y}\right)=2{,}106\pm 0{,}007.$

2) Методом строгого пооперационного учета погрешностей.

Функция	Δ	δ	Формулы	Результат
x	0,05	0,009	$\delta=\frac{\Delta}{\lvert x\rvert}$	5,6

y	0,005	0,0008	$\delta = \frac{\Delta}{\lvert y \rvert}$	6,82
$\sqrt{y}$	0,0011	0,0004	$Ф3, \Delta = \delta(\sqrt{y}) \cdot \lvert\sqrt{y}\rvert$	2,61
$x + \sqrt{y}$	0,052	0,007	$Ф1, \delta = \frac{\Delta}{\lvert x + \sqrt{y} \rvert}$	8,21
$f(x,y)$	0,007	0,004	$Ф4, \delta = \frac{\Delta}{\lvert f(x, y) \rvert}$	2,105

Ответ: $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{y}) = 2{,}105 \pm 0{,}007$.

3) Нестрогим методом пооперационной оценки.

В решении оставляемые сомнительные цифры будем подчеркивать.

Функция	Δ	δ	Правила	Результат	Ответ
x	0,05	0,009		5,6	5,6
y	0,005	0,0008		6,82	6,82
$\sqrt{y}$	0,0011	0,0004	П3,П5	2,611513	$2{,}61\underline{1}$
$x + \sqrt{y}$	0,052	0,007	П1,П5	8,211	$8{,}2\underline{1}$
$f(x,y)$	0,007	0,004	П4,П5	2,105353	$2{,}10\underline{5}$

Ответ: $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{y}) = 2{,}100 \pm 0{,}007$.

Задания практического занятия [4]

Задание 1:

1. Округлить числа до четырех значащих цифр и записать в соответствии с правилом записи приближенных чисел.

2. Округлить число до третьего десятичного знака (тысячных долей), указать значащие цифры.

3. Округлить до сотых и записать в форме $x \pm \Delta x$.

	Вариант									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	254789 23,5689	4574896 56,3248	127548 24,2584	547821 25,4875	987402 9,2541	547891 5,5483	457132 2,1547	587496 3,1245	665541 22,2541	998547 9,2541

2	0,22157	0,00192	5,01241	0,00987	3,98702	0,12543	0,00215	0,32932	1,00254	0,00089
3	1,245±0,00234	6,912±0,00951	4,562±0,00451	9,122±0,00457	1,325±0,00411	0,124±0,00914	2,004±0,00254	7,894±0,00214	0,564±0,09451	0,124±0,00784
	Вариант									
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	478957 4,2547	147254 6,5454	587432 45,1473	968515 9,2594	125214 15,2362	697845 32,6542	665665 21,2154	251421 23,5452	985252 21,1245	586545 12,2149
2	2,00142	0,01245	0,00328	1,00023	5,23452	0,00124	0,09547	3,09547	1,02149	1,0987
3	3,129±0,00369	2,196±0,00478	5,124±0,00912	1,252±0,00128	0,005±0,00125	6,952±0,00659	1,124±0,00125	1,221±0,00965	1,025±0,00012	4,144±0,03259
	Вариант									
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
1	789547 5,1458	547854 6,5496	987251 9,9812	654488 8,4587	124793 10,5512	231298 22,1221	322534 65,4987	458762 6,6651	129598 21,1212	122419 10,1054
2	3,00912	0,00891	1,10012	6,00261	0,99811	6,0063	0,00612	1,02101	9,00321	0,0099
3	1,959±0,00327	0,124±0,00259	5,564±0,00981	9,569±0,00591	0,002±0,00457	2,045±0,00275	4,451±0,00089	2,222±0,00022	3,333±0,00545	0,009±0,00069

Задание 2:

1. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры:

1.1. В узком смысле;

1.2. В широком смысле.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
	42,564	12,951	9,871	2,451	36,124	23,984	1,111	2,245	32,123	98,251
Вариант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
	10,102	54,215	2,225	3,235	9,895	3,962	7,774	8,457	12,457	9,658
Вариант	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
	0,001	0,124	4,012	8,009	45,007	5,451	9,352	78,458	3,124	23.124

2. Определить какое приближенное равенство более точно:

Вариант									
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\frac{5}{3}=1,67$ или $\sqrt{15}=3,87$	$\frac{10}{3}=3,33$ или $\sqrt{54}=7,35$	$\frac{46}{31}=1,48$ или $\sqrt{21}=4,58$	$\frac{17}{13}=1,31$ или $\sqrt{14}=3,74$	$\frac{64}{3}=21,33$ или $\sqrt{45}=6,71$	$\frac{23}{13}=1,77$ или $\sqrt{47}=6,86$	$\frac{7}{3}=2,33$ или $\sqrt{23}=4,80$	$\frac{35}{3}=11,67$ или $\sqrt{12}=3,46$	$\frac{74}{3}=24,67$ или $\sqrt{45}=6,71$	$\frac{12}{7}=1,71$ или $\sqrt{23}=4,80$

Вариант									
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
$\frac{89}{3}=6,85$ или $\sqrt{59}=7,68$	$\frac{45}{23}=1,96$ или $\sqrt{65}=8,06$	$\frac{56}{3}=18,67$ или $\sqrt{47}=6,86$	$\frac{17}{15}=1,13$ или $\sqrt{32}=5,66$	$\frac{91}{15}=6,07$ или $\sqrt{98}=9,90$	$\frac{54}{43}=1,26$ или $\sqrt{65}=8,06$	$\frac{51}{13}=3,92$ или $\sqrt{48}=6,93$	$\frac{23}{18}=1,28$ или $\sqrt{21}=4,58$	$\frac{21}{18}=1,17$ или $\sqrt{35}=5,92$	$\frac{65}{12}=5,42$ или $\sqrt{41}=6,40$
Вариант									
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
$\frac{12}{9}=1,33$ или $\sqrt{34}=5,83$	$\frac{15}{7}=2,14$ или $\sqrt{231}=15,2$	$\frac{23}{17}=1,35$ или $\sqrt{89}=9,43$	$\frac{87}{31}=2,81$ или $\sqrt{215}=14,6$	$\frac{55}{17}=3,24$ или $\sqrt{648}=25,4$	$\frac{56}{47}=1,19$ или $\sqrt{59}=7,68$	$\frac{65}{31}=2,10$ или $\sqrt{97}=9,85$	$\frac{67}{13}=5,15$ или $\sqrt{55}=7,42$	$\frac{96}{51}=1,88$ или $\sqrt{456}=21,3$	$\frac{33}{17}=1,94$ или $\sqrt{33}=5,74$

3. Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки:

3.1. В узком смысле.

3.2. В широком смысле.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0,65498	1,24579	0,05479	3,25412	0,12496	2,05647	5,01547	2,01547	3,65487	2,00145
ΔA	0,00056	0,00025	0,00065	0,00012	0,00014	0,00078	0,00045	0,00031	0,00023	0,00036
Вариант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
A	3,12547	2,01547	0,95472	1,95478	0,01247	1,24973	3,56478	9,45879	8,56478	2,01547
ΔA	0,00054	0,00085	0,00023	0,00098	0,00045	0,00012	0,00025	0,00078	0,00091	0,00056
Вариант	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
A	5,45712	5,55478	2,22547	6,56487	2,12478	0,12952	4,45127	2,12457	0,12596	0,36598
ΔA	0,00056	0,00025	0,00036	0,00074	0,00012	0,00045	0,00085	0,00074	0,00069	0,00036

Вариант	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	3,12547	5,45712	5,55478	6,56487	0,65498	0,95472	4,45127	2,12457	2,05647	1,24579
ΔA	0,00056	0,00025	0,00012	0,00045	0,00085	0,00012	0,00036	0,00056	0,00078	0,00054

Задание 3: Произвести оценку точности вычислений:

1) Строгим методом итоговой оценки.

2) Методом строгого пооперационного учета погрешностей.

3) Нестрогим методом пооперационной оценки.

					x	***y***
1	**2**	**3**	**4**	**5**	0,5	0,52
6	**7**	**8**	**9**	**10**	1,0	1,02
11	**12**	**13**	**14**	**15**	1,5	1,52
16	**17**	**18**	**19**	**20**	2,0	2,02
21	**22**	**23**	**24**	**25**	2,5	2,52
26	**27**	**28**	**29**	**30**	3,0	3,02
$\sqrt{\sin\left(x+y^2\right)}$	$2\cos(x-y)$	$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$\frac{9x+y}{\sin x}$	$\frac{-8y}{tg\left(x^2+y\right)}$		

Контрольные вопросы

1. Что такое абсолютная погрешность приближенного значения величины?
2. Что такое относительная погрешность приближенного значения величины?
3. Какое влияние на погрешность арифметических действий оказывают погрешности исходных данных?
4. В какой зависимости находится абсолютная погрешность значения функции одной переменной от абсолютной погрешности значения аргумента?
5. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по правилам подсчета цифр с пооперационным учетом ошибок? на заключительном этапе?
6. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по методу строгого учета предельных погрешностей с пооперационным учетом ошибок? на заключительном этапе?
7. Как вычисляются предельные погрешности результата при использовании методики итоговой оценки ошибки вычислений?
8. В чем основное отличие метода границ от вычислений по методу строгого учета границ погрешностей?
9. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по методу границ с пооперационным учетом ошибок? на заключительном этапе?

2. Практическая работа №2.

Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом половинного деления и методом простой итерации

Цель занятия:

- Закрепить навыки отделения корней алгебраических уравнений;
- Закрепить умения решать алгебраические уравнения с использованием приближенных методов (метод половинного деления, метод простой итерации);
- Разработать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач методом половинного деления и простой итерации, принимая во внимание необходимую точность получаемого результата.

Краткие теоретические сведения

Пусть имеется уравнение вида $f(x)=0$, где $f(x)$ - алгебраическая или трансцендентная функция. [1]

Решить такое уравнение – значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней, и найти значения корней (с указанной точностью). Ограничимся обсуждением методов поиска лишь *действительных* корней, не затрагивая проблему корней комплексных. [1]

Решение указанной задачи начинается с отделения корней, т.е. с установления:

1. количества корней;
2. наиболее «тесных» промежутков, каждый из которых содержит только один корень.

Универсальных приемов решения этой задачи, пригодных для *любых* уравнений, не существует.

Тем не менее, отделение корней во многих случаях можно произвести графически.

Упростим задачу, заменив уравнение $f(x)=0$ равносильным ему уравнением $f_1(x)=f_2(x)$.

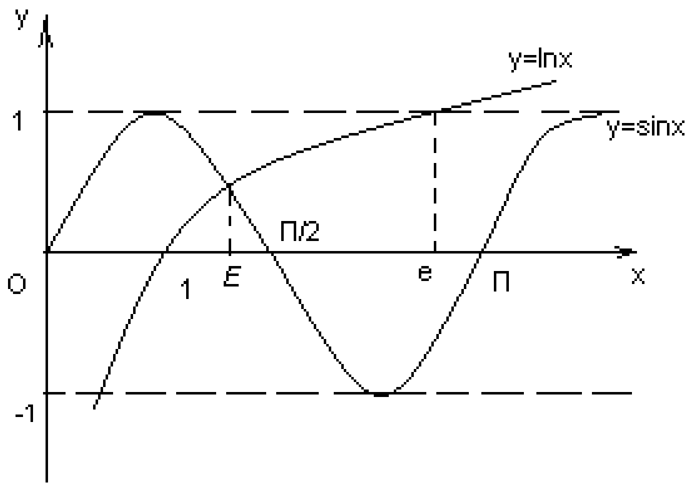
В этом случае строятся графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, а потом на оси x отмечаются отрезки, локализующие абсциссы точек пересечения этих графиков.

При решении задачи об отделении корней бывают полезными следующие **положения**[1]:

1. Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ принимает на его концах значения разных знаков (т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$), то уравнение ($f(x)=0$) имеет на этом отрезке, по меньшей мере, один корень.

2. Если функция $f(x)$ к тому же еще и монотонна, то корень на отрезке $[a;b]$ единственный.

Пример: Для графического отделения корней уравнения $\sin 2x - \ln x = 0$ преобразуем его к равносильному уравнению $\sin 2x = \ln x$ и отдельно построим графики функций $\sin 2x$ *и* $\ln x$.[1]



Из графика видно, что уравнение имеет единственный корень и этот корень находится на отрезке [1;1,5].

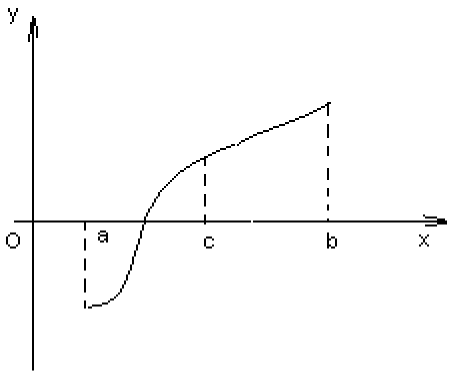
Вычислим для проверки значения функции $f(x) = \sin 2x - \ln x$ на концах отрезка [1;1,5]: f(1)=0.909298; f(1,5)= -0,264344.

Как видно, корень на отрезке [1;1,5] действительно имеется, так как f(1)f(1.5)<0

Рассмотренный прием позволяет при желании сузить отрезок, полученный графическим способом.

Метод половинного деления

Пусть уравнение *f(x)=0* имеет на отрезке [*a;b*] единственный корень, причем функция *f(x)* на этом отрезке непрерывна. Разделим отрезок [*a;b*] пополам точкой *c=(a+b)/2*. Если f(c)≠0, то возможны два случая: f(x) меняет знак либо на отрезке [*a;c*](рис 1),либо на отрезке [*c;b*] (рис 2).[1]



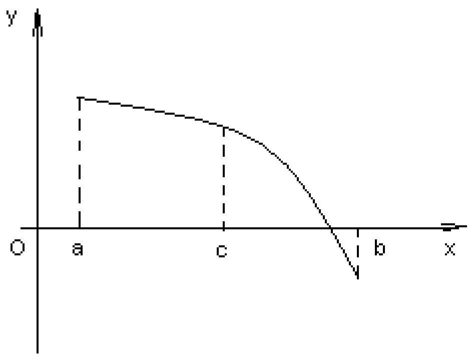


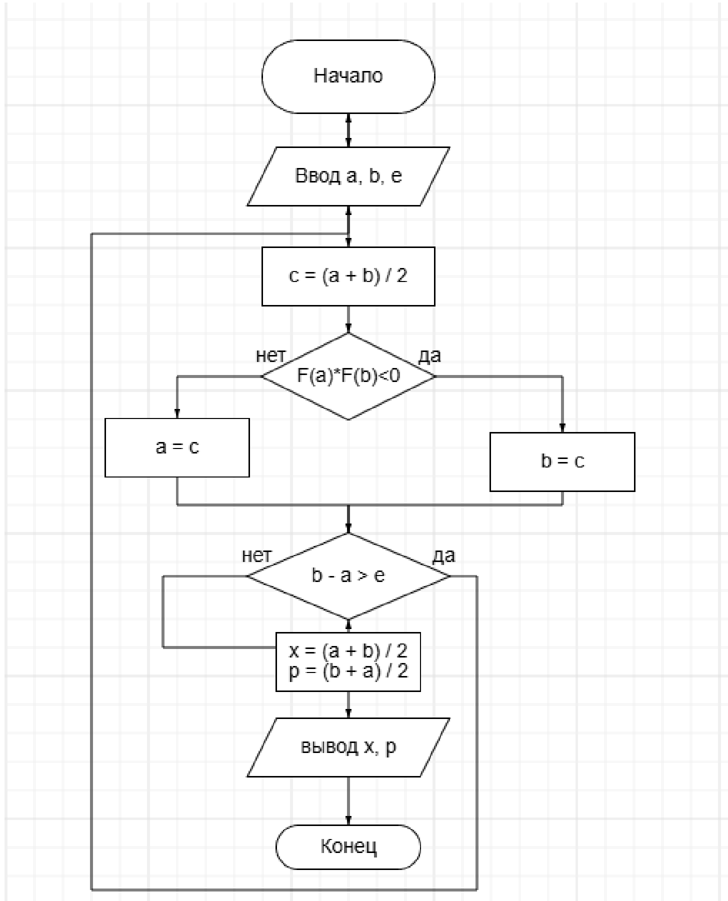
Рис 1. – функция f(x) меняет знак на отрезке [a;c]

Рис 2. – функция f(x) меняет знак на отрезке [c;b]

Выбирая в каждом случае отрезок, где функция меняет знак, и продолжая процесс половинного деления, можно приблизиться к сколь угодно малому отрезку, который будет содержать корень уравнения.

Метод половинного деления можно реализовать с помощью программы на компьютере.

Блок схема алгоритма метода половинного деления:



Пример: Найти корень уравнения $\sin 2x - \ln x = 0$ на отрезке [1,3;1,5] с точностью до 10^{-3}.[1]

Решение: Уравнение $\sin 2x - \ln x = 0$ имеет единственный корень на отрезке [1,3;1,5]

Уточним корень уравнения:

Найдем середину отрезка [1,3;1,5]: $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.3+1.5}{2} = 1.4$.

Определим, на каком из полученных отрезков [1,3;1,4] и [1,4;1,5] функция $f(x) = \sin 2x - \ln x$ меняет свой знак.

1) [1,3;1,4]: $f(1{,}3) = \sin(2 \cdot 1{,}3) - \ln(1{,}3) > 0;$ $f(1{,}4) = \sin(2 \cdot 1{,}4) - \ln(1{,}4) < 0.$

2) [1,4;1,5]: $f(1{,}4) = \sin(2 \cdot 1{,}4) - \ln(1{,}4) < 0;$ $f(1{,}5) = \sin(2 \cdot 1{,}5) - \ln(1{,}5) < 0.$

Следовательно, корень уравнения находится на отрезке [1,3;1,4].

Проверим, достигается ли заданная точность решения 10^{-3}:

$\varepsilon = \frac{1{,}4 - 1{,}3}{2} = 0{,}05 > 10^{-3}$, точность не достигнута.

Разделим отрезок [1,3;1,4] пополам точкой $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.3+1.4}{2} = 1.35$.

Определим, на каком из полученных отрезков [1,3;1,35] и [1,35;1,4] функция $f(x) = \sin 2x - \ln x$ меняет свой знак.

1) [1,3;1,35]: $f(1{,}3) = \sin(2\cdot 1{,}3) - \ln(1{,}3) > 0;$ $f(1{,}35) = \sin(2\cdot 1{,}35) - \ln(1{,}35) > 0.$ 2) [1,35;1,4]:

$f(1{,}35) = \sin(2\cdot 1{,}35) - \ln(1{,}35) > 0.$
$f(1{,}4) = \sin(2\cdot 1{,}4) - \ln(1{,}4) < 0.$

Значит, корень уравнения находится на отрезке [1,35;1,4].

Проверим, достигается ли заданная точность решения 10^{-3}:

$\varepsilon = \frac{1{,}4 - 1{,}35}{2} = 0{,}025 > 10^{-3}$, точность не достигнута.

Снова разделим отрезок [1,35;1,4] пополам точкой $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.35+1.4}{2} = 1.375$.

Определим, на каком из полученных отрезков [1,35;1,375] и [1,375;1,4] функция $f(x) = \sin 2x - \ln x$ меняет свой знак.

1) [1,35;1,375]: $f(1{,}35) = \sin(2\cdot 1{,}35) - \ln(1{,}35) > 0;$ $f(1{,}375) = \sin(2\cdot 1{,}375) - \ln(1{,}375) > 0.$

2) [1,375;1,4]: $f(1{,}375) = \sin(2\cdot 1{,}375) - \ln(1{,}375) > 0.$ $f(1{,}4) = \sin(2\cdot 1{,}4) - \ln(1{,}4) < 0.$

Значит, корень уравнения находится на отрезке [1,375;1,4].

Проверим, достигается ли заданная точность решения 10^{-3}:

$\varepsilon = \frac{1{,}4 - 1{,}375}{2} = 0{,}0125 > 10^{-3}$, точность не достигнута.

Продолжая делить отрезок пополам и проверять знаки функции на новых промежутках, до тех пор, пока не будет достигнута нужная точность решения, получим:

Решение уравнения с точностью 10^{-3}: x=1,399.

Задания практического занятия[4]

Задание 1

Отделите корни заданного уравнения, пользуясь графическим методом. Выполните это задание с применение одного из инструментальных средств.

Задание 2.

По методу половинного деления вычислите один корень заданного уравнения с точностью 10^{-3}:

a) С помощью расчетной таблицы и калькулятора

b) С помощью программы для компьютера (C#, python)

Задание 3.

Вычислите один корень заданного уравнения используя метод простой итерации. Можно использовать программу для компьютера на C# или python

Номер варианта	Уравнение	Номер варианта	Уравнение
1	$(0,2x)^3 = \cos x$	**16**	$\sin x - 0,2 = 0$
2	$5x^3 - 20x + 3 = 0$	**17**	$4\cos + 0,3 = 0$
3	$x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2.5 = 0$	**18**	$x^2 - \sin \pi = 0$
4	$\sin 2x - \ln x = 0$	**19**	$3x^3 - 3\cos \pi x / 2 = 0$
5	$8\cos x - x = 6$	**20**	$3x^3 - 20\sin x = 0$
6	$4\cos x + 0.3x = 0$	**21**	$4x^4 - 6,2 = \cos 0,6x$
7	$x - 10\sin x = 0$	**22**	$2\lg(x+7) - 5\sin x = 0$
8	$\sqrt{4x+7} = 3\cos x$	**23**	$2x^2 - \sin \pi x = 0$
9	$x\sin x - 1 = 0$	**24**	$2x^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^x = 0$
10	$10\cos x - 0.1x^2 = 0$	**25**	$4x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$
11	$5\sin 2x = \sqrt{1-x}$	**26**	$x^3 - \cos \pi s x = 0$
12	$3\sin 8x = 0.7x - 0.9$ на отрезке [-1;1]	**27**	$2^{-x} = 10 - 0,5x^2$
13	$2x^2 - 5 = 2^x$	**28**	$2^{-x} = \sin x$
14	$4x^4 - 6.2 = \cos 0.6x$	**29**	$\ln(x+5) = \cos x$
15	$1,2 - \ln x = 4\cos 2x$	**30**	$\ln(x+6,1) = 2\sin(x-1,4)$

Контрольные вопросы

1. Что означает «решить уравнение аналитически» и «решить уравнение численно»?
2. В чем суть задачипо отделению корней?
3. В чем заключаетсяключеваяконцепция метода половинного деления?
4. Способен ли метод половинного деления дать точное значение корня уравнения?
5. Какова основная идея метода простой итерации?

3. Практическая работа №3.

Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом хорд и касательных

Цель занятия:

- Закрепить навыки отделения корней алгебраических уравнений;
- Закрепить умения решать алгебраические уравнения с использованием приближенных методов (метод хорд и касательных);
- Разработать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач с применением метода хорд и касательных, принимая во внимание необходимую точность получаемого результата.

Краткие теоретические сведения

Метод хорд состоит в том, что на достаточно малом промежутке [a; b] дуга кривой y=f(x). заменяется стягивающей ее хордой. Точка пересечения хорды с осью Ох принимается за приближенное значение корня.

Кривая расположена выпуклостью вниз.Возможны два случая:

1) $f(a)>0$.
2) $f(a)<0$.

В первом случае последовательные приближения получаем по формуле:

(1) $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), \ (n=0,1,2,3,\ldots).$$

Во втором случае последовательные приближения получаем по формуле:

(2) $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n)$$

таким образом, можно сделать следующие выводы[5]:

1) Неподвижен тот конец хорды, для которого знак функции $f(x)$совпадает со знаком ее второй производной $f''(x)$;

2) Последовательные приближения x_n лежат по ту сторону от корня,где $f(x) \cdot f''(x)<0$.

3) В обоих случаях каждое следующее приближение x_{n+1} ближе к корню, чем предыдущее x_n.

Для оценки погрешности можно пользоваться неравенством:

(3) $$|x_n - x_{n-1}| < \Delta,$$

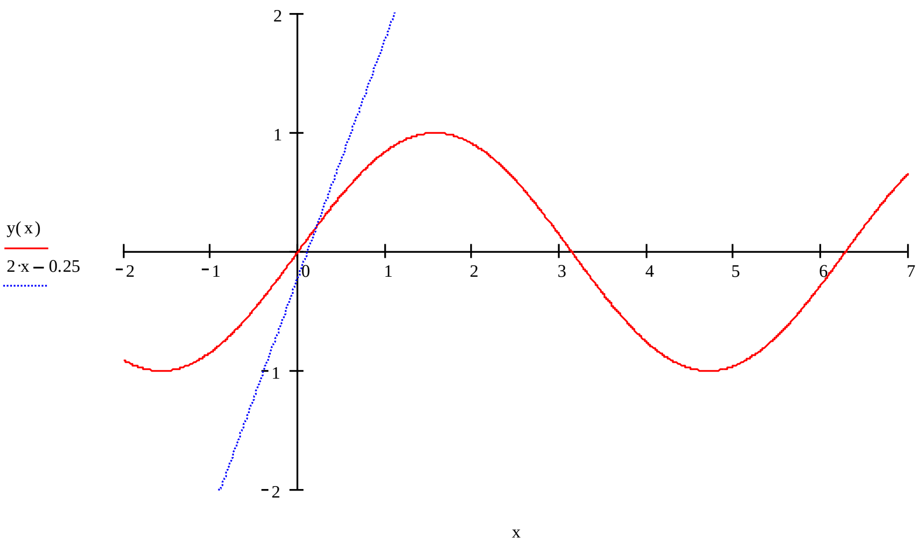
Пример: Найти корень уравнения 2*x*-sin*x*=0,25 на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.[1]

Отделим корень графически, для этого данное уравнение запишем так:

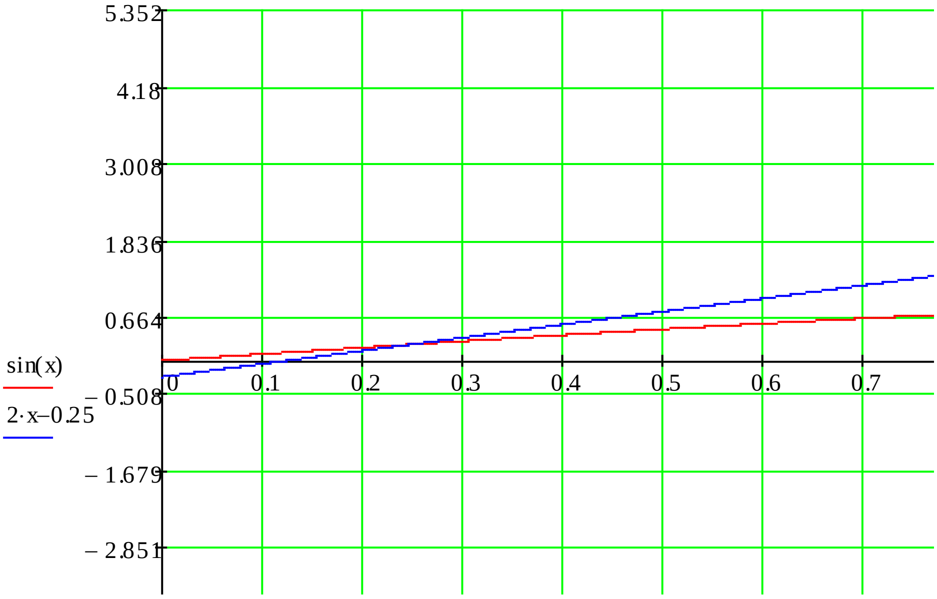
sin*x*=2*x*-0,25

Построим графики функций *y*=sin*x* и *y*=2*x*-0,25

По виду графика можно сделать предположение, что корень расположен между*a*=0,2 и *b*=0,3.



Увеличим отрезок пересечения графиков



Следовательно

$f(a)$=-0,0487 $f(b)$=0,0545

$f'(x)$=2-cos$x$ $f''(x)$=sin$x$

$f''(0,3)$=0,2955 $f''(0,2)$=0,1987

Так как $f(b)>0$ и $f''(b)>0$, то конец хорды B берем за неподвижный и считаем по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n).$$

Вычисления оформим в таблице:

n	x_n	$f(x_n)$	b-x_n	$\frac{f(x_n)\cdot(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}$
0	a=0,2	-0,04870	0,10000	0,04720
1	0,24720	-0,00029	0,05280	0,00028
3	0,24748			

Проверяем точность вычислений:

Так как $|x_2 - x_1| = |0{,}24748 - 0{,}2472| = 0{,}00028 < 0{,}001$, т. е. x≈0,247 с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Метод касательных

Пусть корень уравнения $f(x)=0$ находится на отрезке $[a;\ b]$, где$f'(x)$ и $f''(x)$непрерывны и сохраняют постоянные знаки на всем отрезке $[a;\ b]$. Кроме того$f'(x)=0$.

Геометрический метод касательных состоит в том, что дуга кривой $y=f(x)$ заменяется касательной к этой кривой.[1]

Обозначим$y=0$, $x=x_{п+1}$, тогда получим формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f[x_n]}{f'(x_n)}.$$

Учитывая эти условия, для выбора начального приближения корня можно руководствоваться следующим **правилом**: за начальную точку x_0следует брать тот конец отрезка $[a;\ b]$, в котором знак функции совпадает со знаком второй производной. Для оценки приближения корня можно воспользоваться неравенством:[1]

$$|x_{n+1} - x_n| < \Delta.$$

Это условие проверяют, начиная с $n=1$. Процесс приближений заканчивается при том n, начиная с которого выполняется условие.

Пример: Найти корень уравнения $2x\text{-}\sin x=0{,}25$ на отрезке [0,2; 0,3] с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.[1]

Получаем:

$a=0{,}2$; $b=0{,}3$; $f(a)=-0{,}0487$; $f(b)=0{,}0545$;

$f''(0{,}2)>0$;

$f'(\mathrm{x})=2-\cos x$;$f'(0{,}2)=1{,}0199$; $f'(x)=1{,}044$;

$f''(0{,}3)>0$, так как $f(0{,}3)\cdot f''(0{,}3)>0$, то за x_0 берем значение 0,3 и составляем таблицу:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0 1 3	0,3 0,2478 0,2475	0,0545 0,00033	1,0447 1,0306	-0,0522 -0,00032

$|x_2 - x_1| = 0{,}0003 < 0{,}001$, т.е. $x\approx 0{,}247$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

Комбинированный метод хорд и касательных

Методы хорд и касательных дают приближения к корню с разных сторон. Поэтому их часто применяют в сочетании друг с другом. Уточнение корня происходит быстрее.

Пример: Вычислить с точностью до 0,0005 корень уравнения

$f(x) = x^5 - x - 0{,}2 = 0,$ на отрезке [1;1,1].

$f'(x)=5x^4-1$ и $f''(x)=20x^3$. В выбранном промежутке $f'(x)>0$; $f''(x)>0$, т.е. знаки производных сохраняются. Пусть $x_0=1$ и $\bar{x}_0 = 1{,}1$. Вычисления располагаем в таблице:

n	x_n	$\bar{x}_n$	$f(\bar{x}_n)$	$f'(\bar{x}_n)$	$-\frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}$	$f(x_n)$	$-\frac{f(x_n)\cdot(\bar{x}_n - x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}$
0	1	1,1	0,3105	6,3205	-0,0491	-0,2000	0,0392
1	1,0392	1,0509	0,0309	5,0984	-0,00606	-0,02722	0,0054
2	1,04462	1,04484					

$\left|\bar{x}_2 - x_2\right| = 0{,}00022 < 0{,}0005$ - т.е. нужная степень точности достигнута, поэтому:

$$\mu \approx \frac{1}{2}\cdot\left(0{,}0462 + 1{,}04484\right) \approx 1{,}04473 \approx 1{,}045.$$

Задания практического занятия

Задание 1.

Отделите корни заданного уравнения, пользуясь графическим методом. (см. практическое занятие №2)

Задание 2.

По методу хорд вычислите один корень заданного уравнения с точностью 10^3.

а) с помощью «ручной» расчетной таблицы и калькулятора;

б) с помощью программы для компьютера.

Задание 3

.По методу касательных вычислите один корень заданного уравнения с точностью 10^{-3}.

а) с помощью «ручной» расчетной таблицы и калькулятора;

б) с помощью программы для компьютера.

Сопоставьте и прокомментируйте полученные результаты

Номер варианта	Уравнение	Номер варианта	Уравнение
1	$(0,2x)^3 = \cos x$	16	$\sin x - 0,2 = 0$
2	$5x^3 - 20x + 3 = 0$	17	$4\cos + 0,3 = 0$
3	$x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2.5 = 0$	18	$x^2 - \sin \pi = 0$
4	$\sin 2x - \ln x = 0$	19	$3x^3 - 3\cos \pi x / 2 = 0$
5	$8\cos x - x = 6$	20	$3x^3 - 20\sin x = 0$
6	$4\cos x + 0.3x = 0$	21	$4x^4 - 6,2 = \cos 0,6x$
7	$x - 10\sin x = 0$	22	$2\lg(x+7) - 5\sin x = 0$
8	$\sqrt{4x+7} = 3\cos x$	23	$2x^2 - \sin \pi x = 0$
9	$x\sin x - 1 = 0$	24	$2x^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^x = 0$
10	$10\cos x - 0.1x^2 = 0$	25	$4x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$
11	$5\sin 2x = \sqrt{1-x}$	26	$x^3 - \cos \pi s x = 0$
12	$3\sin 8x = 0.7x - 0.9$ на отрезке [-1;1]	27	$2^{-x} = 10 - 0,5x^2$
13	$2x^2 - 5 = 2^x$	28	$2^{-x} = \sin x$
14	$4x^4 - 6.2 = \cos 0.6x$	29	$\ln(x+5) = \cos x$
15	$1,2 - \ln x = 4\cos 2x$	30	$\ln(x+6,1) = 2\sin(x-1,4)$

Контрольные вопросы

1. Дайте общее описание метода касательных?
2. Дайте общее описание метода хорд?
3. Нарисуйте геометрические схемы методов касательных и хорд.
4. Запишите формулы для построения итерационных последовательностей для каждого метода.
5. Как проверяется требуемая точность в методах?

4. Практическая работа №4.

Решение систем линейных алгебраических методом Гаусса

Цель занятия:

- Углубить понимание теоретического материала по данной теме через решение практических задач;
- Закрепить навыки решения системы линейных уравнений с использованием метода Гаусса;
- Укрепить умения вычислять значения определителя системы методом Гаусса;
- Развить навыки нахождения обратной матрицы с применением метода Гаусса.

Краткие теоретические сведения

Рассмотрим систему из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n = B_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \ldots + A_{2n}x_n = B_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n11}x_1 + A_{n2}x_2 + \ldots + A_{nn}x_n = B_n \end{cases} . \quad 1)$$

Если ее определитель $D \neq 0$, то она имеет ровно одно решение.

Точным решением (1) называется набор чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при подстановке которых в системувсе уравнения (1) превращаются в тождества. [4]

Набор чисел $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ называется *приближенным решением* системы (1), если все числа x_k^* близки к числам x_kточного решения, т.е. все погрешности $\Delta x_k = |x_k^* - x_k||$ достаточно малы, а также, если при подстановке его в систему (1) все уравнения превращаются в приближенные равенства, т.е. все величины $r_k = A_{k1}x_1^* + A_{k2}x_2^* + \ldots + A_{kn}x_n^* - B_k$, называемые *невязками,* достаточно близки к нулю по модулю[4].

Метод Гаусса. Это прямой метод. Его суть в том, что система (1) приводится к треугольному виду:

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \beta_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{nn}x_n = \beta_n \end{cases}.$$

И в таком виде легко решается: сначала находится корень x_n, затем x_{n-1} и т.д. процесс приведения системы (1) к виду (2) называется прямым ходом, а процесс решения системы (2) - обратным ходом.

Погрешность решения, полученного методом Гаусса, складывается из неустранимой погрешности исходных данных (если коэффициенты и свободные члены системы - приближенные числа) и погрешностей округления. Т.к. в процессе вычислений приходится выполнять очень много арифметических действий, то учесть погрешность результата очень трудно. При ручных вычислениях обычно в промежуточных результатах оставляют после запятой на 1 - 2 цифры больше, чем требуется в окончательном результате. Точность же, в смысле модулей невязок, проверяется непосредственно после получения решения.

Пример: Решить систему методом Гаусса:

Составить расчетный бланк, получить решение x_1, x_2, x_3, x_4 с точностью 0,0005. Определить невязки.

Дана матрица со следующими коэффициентами и свободными членами:

0,68	0,05	-0,11	0,08	2,15
0,21	-0,13	0,27	-0,8	0,44
-0,11	-0,84	0,28	0,06	-0,83
-0,08	0,15	-0,5	-0,12	1,16

Решение:

Для решения этой системы составим расчетную таблицу. Так как корни нужно найти с точностью 0,0005, то при расчетах оставляем после запятой три цифры и одну запасную.

Раздел	Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены	Контрольные суммы ∑	Строчные суммы S
	x1	x2	x3	x4			
A	0,68	0,05	-0,11	0,08	2,15	2,85	
	0,21	-0,13	0,27	-0,8	0,44	-0,01	
	-0,11	-0,84	0,28	0,06	-0,83	-1,44	
	-0,08	0,15	-0,5	-0,12	1,16	0,61	
	1	0,074	-0,162	0,118	3,162	4,191	4,191
A1	0	-0,145	0,304	-0,825	-0,224	-0,890	-0,890
	0	-0,832	0,262	0,073	-0,482	-0,979	-0,979
	0	0,156	-0,513	-0,111	1,413	0,945	0,945
		1	-2,0900	5,6704	1,5399	6,1203	6,1203
A2		0	-1,4765	4,7902	0,7989	4,1126	4,1126
		0	-0,1871	-0,9945	1,1729	-0,0088	-0,0088
			1	-3,2443	-0,5411	-2,7854	-2,7854
A3			0	-1,6017	1,0716	-0,5300	-0,5300
				1	-0,6691	0,3309	0,331
B				**1**	-0,6691		
			1		-2,7118		
		1			-0,3337		
	1				2,8264		

В разделе А вносятся коэффициенты исходной системы и свободные члены. Для исключения случайных ошибок в схеме единственного деления предусмотрен текущий контроль правильности вычислений; с этой целью в схему вкачены столбец контрольных и строчных сумм [1].

В столбце строчных сумм помещаются суммы коэффициентов и свободного члена соответствующих строк. Числа в столбце контрольных сумм вычисляются параллельно с основными расчетами. Для этого над числами строчных сумм осуществляют арифметические операции, аналогичные операциям над коэффициентами.

Проверка вычислений заключается в том, что соответствующие строчные и контрольные суммы должны быть близки. Если расхождение между ними будет значительно, то это будет указывать на возможную ошибку в вычислениях.

В окончательном результате четвертые цифры после запятой отбрасываем (как сомнительные) получаем

Ответ: $x_1 \approx 2{,}826; x_2 \approx -0{,}334; x_3 \approx -2{,}712; x_4 \approx -0{,}669.$

Полученные корни (округленные) подставим в уравнение системы:

Номер уравнения	Результаты подстановки в систему	Свободные члены	НЕВЯЗКИ
1	2,14978	2,15	-0,00022
2	0,43984	0,44	-0,00016
3	-0,82980	-0,83	0,0002

Задания практического занятия

Задание: Решить систему методом Гаусса:

1. Вручную по схеме единственного деления, получить решение x_1, x_2, x_3, x_4 с точностью 0,001. Определить невязки.

2. С использованием инструментальных средств получить значения корней с точностью 0,000005 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$.

3. Вычислить погрешности результатов: $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4$, полученных в результате ручных расчетов.

A₁			**1**	10,2	5.92	13.66	20.5	10.2	**A₂**			
			2	9.28	2,72	-8.00	25.78	2.72				
			3	63,3	1,76	20.06	-15,6	20,06				
			4	2,25	3.80	4,5	10.4	-63.3	**1**	**2**	**3**	**4**
-91,4	-4,92	-8,14	10,6	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	6.07	-79,6	-4,92	-2.71
-1.84	2.43	9.38	4.7	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	-1.24	-9.71	-3,12	-1.76
-14,8	20,25	-31,18	7,24	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	11,45	-13,6	19,78	25,4
-8,14	9,28	-79,6	32,6	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	-7.8	17.62	5,34	4,2
50,3	-4,92	10,2	78,24	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	14.82	-5,29	9,16	-8,6
-26,8	-24,83	25,8	32,6	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	5,61	4,73	-3,33	0,58
1	**2**	**3**	**4**	14,61	3,67	5,44	31,17	17,51	**1**			
A₃				-8,06	4,32	-3,51	17,45	53,4	**2**	**A₄**		
				-17,6	-3,05	0,48	-45,4	-4.35	**3**			
				18,5	-2,16	4,22	32,1	14,55	**4**			
				50,3	-0,64	0,38	-6,96	2,40	**1**			
				25,8	0,26	0,32	1,92	1,93	**2**	**B**		
				32,6	1,34	2,16	-2,37	-1,84	**3**			
				17,8	-1,4	2,3	2,44	9.38	**4**			

Контрольные вопросы

1. Какие методы решения СЛАУ. вы знаете?

2. В чем заключается прямой и обратный ход в схеме единственного деления?

3. На чем основываются алгоритмы вычисления определителя по методу Гаусса?

5. Практическая работа №5.
Решение систем линейных алгебраических уравнений приближенными методами

Цель занятия:

- Углубить усвоение теоретического материала по данной теме через решение практических задач;
- Закрепить навыки решения системы линейных уравнений с использованием приближенныхметодов (метод простой итерации, метод Зейделя).

Краткие теоретические сведения

Метод простых итераций. Применение итерационных методов состоит из двух этапов:

1. Приведение системы (1) к следующему виду:

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n - B_1 \\ x_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \ldots + A_{2n}x_n - B_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n A_{n11}x_1 + A_{n2}x_2 + \ldots + A_{nn}x_n - B_n \end{cases}.$$

2. Итерационный процесс, примененный к системе (3).

Запишем систему (3) в матричном виде:

$$(4) \qquad X=AX+B.$$

Пусть X^0 - начальное приближение, X^n - n-оеприближение, n-ая итерация заключается в подстановке вектора X^{n-1}в правую часть (4). Результатом подстановки будет вектор X^n.таким образом, мы получим последовательность векторов $X^0,X^1,\ldots,X^n,\ldots$ - последовательных приближений.

Определение: Если последовательность векторов сходится к какому-либо вектору, то она сходится именно к точному решению системы (3). В этом случае итерационный процесс называется *сходящимся.*[1]

Замечания :

1. Итерационный процесс сходится, если $\|A\|<1$, где $\|A\|-$норма матрицы A. Этому условию обязательно должна удовлетворять система (3).

2. Если $\|A\|<1$, то в качестве начального приближения можно взять любой вектор. Например, $X^0=B$.

3. Для $\|A\|$ справедливы следующие оценки:

$$\|A\| \le \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \equiv \|A\|_1;$$

$$\|A\| \le \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \equiv \|A\|_2;$$

$$\|A\| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|_2} \equiv \|A\|_3.$$

таким образом, чтобы процесс сходился, достаточно, чтобы хотя бы одна из оценок $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_3$ была меньше единицы.

4. Если X - точное решение, а $X^0=B$, то имеет место формула

$$\|X - X^n\|_1 \le \frac{\|A\|_1^{n+1}}{1-\|A\|_1} \cdot \|B\|_1, \tag{5}$$

где $\|\mathbf{B}\|_1-$максимум модулей координат вектора B, а $\|X - X^n\|_1$ – соответственно погрешность n-го приближения. С помощью формулы (5) получают оценку числа итерации, достаточного для нахождения решения с заданной погрешностью.

Пример: Дана матрица коэффициентов и свободных членов

0,32	-0,05	0,11	-0,08	2,15
0,11	0,16	-0,28	-0,06	-0,83
0,08	-0,15	0	0,12	1,16
-0,21	0,13	-0,27	0	0,44

Оценку точности n-ой итерации дает формула (5). Потребуем, чтобы правая часть формулы не превышала 0,0001. В нашем случае $\|A\|_1 = 0{,}61$ и $\|B\|_1 = 2{,}15.$ Подставляем эти числа, получается, неравенство: $0{,}61^{n+1} \cdot \dfrac{2{,}15}{0{,}39} \le 0{,}0001.$

Решая его, находим, что $n+1 \ge 22{,}087$, т.е. 22-ая итерация даст нам решение с заданной точностью.

Расчеты будем проводить с 5-ю цифрами после запятой (одна цифра запасная). Полученные итерации сведем в таблицу.

№	x_1	x_2	x_3	x_4
0	2,15	-0,83	1,16	0,44
1	2,97190	-1,07750	1,50930	-0,43260
2	3,35551	-1,07214	1,50747	-0,73168
3	3,50173	-1,01063	1.50146	-0.81105
4	3,55113	-0,97826	1,49441	-0,83214
5	3,56623	-0,96440	1,49097	-0,83640
6	3,57033	-0.95931	1,48959	-0,83684
7	3,57127	-0,95763	1,48910	-0,83667
8	3,57142	-0,95713	1,48895	-0,83652
9	3,57142	-0,95700	1,48890	-0,83644
10	3,57140	-0,95697	1,48889	-0,83641
11	3,57139	-0,95697	1,48889	-0,83640
12	3,57138	-0,95697	1,48889	-0,83640
13	3,57138	-0.95697	1,48889	-0,83640

После 12-ой итерации процесс приближения остановился.

Ответ: $x_1 \approx 3{,}5714; x_2 \approx -0{,}9570; x_3 \approx -1{,}4889; x_4 \approx -0{,}8364.$

Задания практического занятия

Задание

Решить систему линейных уравнений вида методом простых итераций с точностью до 0,0001, предварительно оценив число достаточных для этого итераций. Коэффициенты и свободные члены системы взять из таблицы соответственно номеру варианта.

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="4">A₁</td><td>1</td><td>0.5</td><td>0.15</td><td>0</td><td>-0.12</td><td>0.06</td><td colspan="4" rowspan="3">A₂</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,19</td><td>0</td><td>-0,03</td><td>-0,01</td><td>-0.06</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,02</td><td>0,15</td><td>-0,02</td><td>0</td><td>-0,03</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0.08</td><td>-0,05</td><td>0.08</td><td>0,07</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0,15</td><td>-0,17</td><td>-0,01</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>-0,3</td><td>0,15</td><td>0</td><td>0,01</td></tr>
<tr><td>0,04</td><td>-0,18</td><td>0,02</td><td>-0.03</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>0.15</td><td>-0.3</td><td>0.04</td><td>-0.05</td></tr>
<tr><td>0,04</td><td>0,18</td><td>-0,18</td><td>0,06</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>0.02</td><td>0,01</td><td>-0,01</td><td>-0.04</td></tr>
<tr><td>-0,02</td><td>0,1</td><td>-0,44</td><td>0,12</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>-0,3</td><td>-0,18</td><td>0,15</td><td>-0,48</td></tr>
<tr><td>0,07</td><td>0,17</td><td>-0,03</td><td>-0,04</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>-0,12</td><td>0,14</td><td>-0,25</td><td>0,17</td></tr>
<tr><td>0,08</td><td>-0,08</td><td>0,15</td><td>0.03</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>0,02</td><td>-0,01</td><td>-0,02</td><td>0,01</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0,04</td><td>0,14</td><td>0,02</td><td>0,01</td><td>0,4</td><td>1</td><td colspan="3" rowspan="4">A₄</td></tr>
<tr><td colspan="4" rowspan="3">A₃</td><td>0,05</td><td>0</td><td>0,28</td><td>-0,01</td><td>0</td><td>2</td></tr>
<tr><td>-0,25</td><td>0,05</td><td>-0,15</td><td>0</td><td>0,02</td><td>3</td></tr>
<tr><td>0,14</td><td>-0,15</td><td>0,01</td><td>0</td><td>-0,31</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="4" rowspan="4"></td><td>1,10</td><td>1,2</td><td>0,18</td><td>1,7</td><td>1,14</td><td>1</td><td colspan="3" rowspan="4">B</td></tr>
<tr><td>2,5</td><td>-0,8</td><td>-0,83</td><td>-1,5</td><td>2,15</td><td>2</td></tr>
<tr><td>-0,32</td><td>-1,3</td><td>0,5</td><td>-0,71</td><td>-2,1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>0,51</td><td>0,5</td><td>1,2</td><td>0,18</td><td>-1,8</td><td>4</td></tr>
</table>

Контрольные вопросы

1. Каким образом система линейных уравнений преобразуется к итерационному виду?
2. Как можно сформулировать критерий сходимости итерационного процесса?
3. Каким образом можно привести исходную систему линейных уравнений к системе с преобладающими диагональными элементами?
4. В чем заключается отличие метода Зейделя от процесса простой итерации?

6. Практическая работа №6.
Составление интерполяционных формул Лагранжа и Ньютона

Цель занятия:

- Углубить понимание теоретического материала по данной теме через выполнение практических заданий;
- Закрепить навыки составления интерполяционных формул Лагранжа.

Краткие теоретические сведения

Простейший способ оценки «близости» F(x) и G(x) основывается на требовании строгого совпадения их значений в точках x_i.Т. е. F(x_i) = $G(x_i)$ =y_i. В этом случае способ аппроксимации функции называют *интерполяцией,* а процедуру вычисления значений[1]

x_0	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
y_0	y_1	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_n

F(x) с помощью G(x) в точках, не являющихся узлами сетки, называется *интерполированием.* [1]

$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}$. - Интерполяционный многочлен Лагранжа [1].

Пример: Построить интерполяционный многочлен для функции, заданной таблицей значений [1]:

x	1	3	4
F(x)	12	4	6

Решение:

Из таблицы следует, что n=2 (на 1 меньше, чем узлов).

$x_0 = 1, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4$

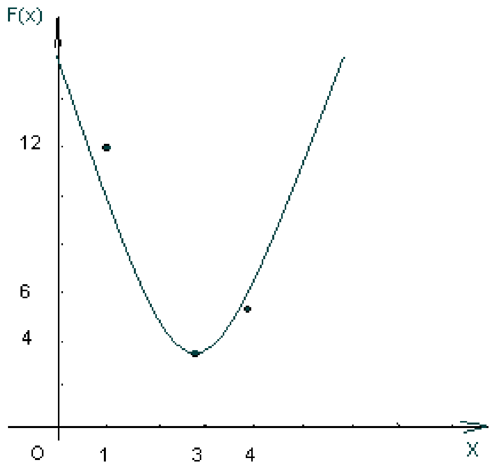
$y_0 = 12, \quad y_1 = 4, \quad y_2 = 6$

По формуле получаем:

$$L_2(x) = 12\frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} + 4\frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} + 6\frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)} =$$
$$= 12\frac{(x^2-7x+12)}{-2(-3)} + 4\frac{(x^2-5x+4)}{2(-1)} + 6\frac{(x^2-4x+3)}{3\cdot 1} =$$
$$= 2(x^2-7x+12) - 2(x^2-5x+4) + 2(x^2-4x+3) = 2x^2-12x+22.$$

Таким образом, интерполяционный многочлен для заданной функции имеет вид $L_2(x) = 2x^2 - 12x + 22.$

Построим график $L_2(x)$ и точки в одной координатной плоскости.



Задания практического занятия

Задание 1:

По заданной таблице значений функции

X	x0	x1	x2	x3
y	y0	y1	y2	y3

составить формулу интерполяционного многочлена Лагранжа. Построить его график иотметить на нем узловые точки.

Задание 2:

Вычислить с помощью калькулятора одно значение заданной функции для промежуточного значения аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа и оценить погрешность интерполяции

вариант	**X0**	**X1**	**X2**	**X3**	**Y0**	**Y1**	**Y2**	**Y3**
1.	-1	0	3	4	-3	5	2	-6
2.	2	3	5	6	4	1	7	2
3.	0	2	3	5	-1	-4	2	-8

4.	7	9	13	15	2	-2	3	-4
5.	-3	-1	3	5	7	-1	4	-6
6.	1	2	4	7	-3	-7	2	8
7.	-1	-1	2	4	4	9	1	6
8.	2	4	5	7	9	-3	6	-2
9.	-4	-2	0	3	2	8	5	10
10.	-1	1,5	3	5	4	-7	1	-8
11.	2	4	7	8	-1	-6	3	12
12.	-9	-7	-4	-1	3	-3	4	-9
13.	0	1	4	6	7	-1	8	2
14.	-8	-5	0	2	9	-2	4	6
15.	-7	-5	-4	-1	4	-4	5	10
16.	1	4	9	11	-2	9	3	-7
17.	7	8	10	13	6	-2	7	-10
18.	-4	0	2	5	4	8	-2	-9
19.	-3	-1	1	3	11	-1	6	-2
20.	0	3	8	11	1	5	-4	-8

Задание 3:

С помощью программы на компьютере уплотните часть таблицы заданной функции, пользуясь интерполяционными формулами Ньютона

Задание 4.

1) Построить правильную таблицу разностей заданной функции f(x) = p(x) + q(x) на участке [0,15; 0,25] с шагом h = 0,01. Значения f(x) вычислить с помощью ЭВМ и округлить до 4 знаков после запятой.

2) С помощью формул Ньютона вычислить значения функцииf(x) в двух заданных точках c и d. Провести апостериорную оценку точности вычислений.

						p(x)	**c**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	1/x	0,152
	6	**7**	**8**	**9**	**10**	x^{-2}	0,153
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	e^{2x}	0,155
	16	**17**	**18**	**19**	**20**	e^{-3x}	0,158
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	1/sinx	0,161
	26	**27**	**28**	**29**	**30**	$\sqrt{x}$	0,164
g(t)	tg 2x	ln x	sin x	$\cos^4 x$	$10x^5$		
d	0,238	0,241	0,245	0,246	0,248		

Контрольные вопросы

1. В каких случаях может потребоваться аппроксимация функции?
2. Какими критериями пользуются для определения «близости» функции?
3. На чем основывается доказательство существования и единственности интерполяционного многочлена для таблично заданной функции?
4. В какой форме строится интерполяционный многочлен Лагранжа?

7. Практическая работа №7.

Нахождение интерполяционных многочленов сплайнами

Цель занятия:

- Закрепить навыки интерполирования функции сплайнами и нахождения ее значение в заданной точке.
- Овладеть вычислительными методами и практическими методами дляоценки погрешности вычислений.
- Приобрети умения и навыки при программировании вычислительных задач на компьютере

Краткие теоретические сведения

При увеличении числа узлов интерполяции степень интерполяционных многочленов значительно возрастает, что усложняет вычисления. Чтобы избежать высоких степеней многочлена, можно разделить интерполяционный отрезок на несколько частей и построить для каждой из них отдельный интерполяционный многочлен. Однако такой подход имеет значительный недостаток: в точках соединения различных интерполяционных многочленов может возникнуть разрыв в их первой производной. В таких случаях целесообразно использовать специализированный метод кусочно-полиномиальной интерполяции — интерполяцию сплайнами.

Суть этого подхода заключается в следующем:

Определение: Функция S_m (x) называется *интерполяционным сплайном порядка m* для функции f(x), заданной таблицей [1]:

x	x_0	x_1	...	x_i	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_i	...	y_n

если:

1. на каждом отрезке $[x_i ;x_{i+1}]$ (i=0,…,n-1) S(x) является многочленом порядка m;
2. S(x) и её производная до (m-1)-го порядка включительно непрерывны на $[x_0 ; x_n]$;

3. $S(x_i)=y_i(i=0,\dots,n)$ - непосредственно условие интерполяции.[1]

По определению кубический сплайн *S(x)* можно представить в виде

$$S(x)=\begin{cases} P_1(x), & x\in[x_0;x_1];\\ P_2(x), & x\in[x_1;x_2];\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ P_n(x), & x\in[x_{n-1};x_n].\end{cases}$$

где каждый из $P_i(x)$ — многочлен третьей степени:$P_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3,\ \ (i=1,2,\dots,n)$

Причем:

$$b_i=\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}+h_ic_i-h_i^2d_i.$$

$$d_i=\frac{c_i-c_{i-1}}{3h_i}(i=2,\dots,n).$$

Пример построения кубического сплайна для функции y=f(x), заданной таблично

Пример:Построить кубический сплайн для функции y=f(x), заданной таблицей [1]:

x_i	-1	0	1	2
y_i	1/2	1	2	4

с дополнительным условием: $S''(-1)=S''(2)=0$. Найти с помощью S(x) значения функции при x=0,3.

Решение:Учитывая, что $C_0=0$ и $C_3=0$ то система $h_{i+1}c_{i+1}+2(h_i+h_{i+1})c_i+h_ic_{i-1}=3\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right).$ сведется к 2 уравнениям.

Шаг таблицы $h_i=1$.Получаем:

$$\begin{cases}1\cdot C_2+2(1+1)C_1+1\cdot C_0=3\left(\frac{y_2-y_1}{1}-\frac{y_1-y_0}{1}\right), \ \text{при}\ \ i=1,\\ 1\cdot C_3+2(1+1)C_2+1\cdot C_1=3\left(\frac{y_3-y_2}{1}-\frac{y_2-y_1}{1}\right), \ \text{при}\ \ i=2.\end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 + 4C_1 = 3\left(\frac{2-1}{1} - \frac{1-\frac{1}{2}}{1}\right) = 3\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}, \\ D + 4C_2 + C_1 = 3\left(\frac{4-2}{1} - \frac{2-1}{1}\right) = 3(2-1) = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 + 4C_1 = \frac{3}{2}, \\ 4C_2 + C_1 = 3. \end{cases}$$

Т.О

$$4c_1 + c_2 = \frac{3}{2}$$

$$c_1 + 4c_2 = 3$$

Решим систему, получим: $c_1 = \frac{1}{5}$; $c_2 = \frac{7}{10}$.

Находим значения коэффициентовd_i:

$$d_1 = \frac{C_1 - C_0}{3h} = \frac{\frac{1}{5} - 0}{3 \cdot 1} = \frac{1}{15} ,$$

$$d_2 = \frac{C_2 - C_1}{3h} = \frac{\frac{7}{10} - \frac{1}{5}}{3} = \frac{1}{6},$$

$$d_3 = \frac{C_3 - C_2}{3h} = \frac{0 - \frac{7}{10}}{3} = -\frac{7}{30} .$$

Теперь по формулам находим коэффициенты b_i:

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} + hC_1 - h^2 d_1 = \frac{1-\frac{1}{2}}{1} + 1 \cdot \frac{1}{5} - 1^2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{19}{30},$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{h} + hC_2 - h^2 d_2 = \frac{2-1}{1} + 1 \cdot \frac{7}{10} - 1 \cdot \frac{1}{6} = 1 + \frac{7}{10} - \frac{1}{6} = \frac{23}{15},$$

$$b_3 = \frac{y_3 - y_2}{h} + hC_3 - h^2 d_3 = \frac{4-2}{1} + 1 \cdot 0 - 1 \cdot \left(-\frac{7}{30}\right) = 2 + \frac{7}{30} = \frac{67}{30} .$$

Т.О $b_1 = \frac{19}{30}$; $d_2 = \frac{23}{15}$; $d_3 = -\frac{67}{30}$.

Получаем:

$$P_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + C_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3, x \in [x_0; x_1],$$

$$P_1(x)=1+\frac{19}{30}(x-0)+\frac{1}{5}(x-0)^2+\frac{1}{15}(x-0)^3, т.е.$$

$$P_1(x)=1+\frac{19}{30}x+\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{15}x^3, x\in[-1;0].$$

$$P_2(x)=a_2+b_2(x-x_2)+C_2(x-x_2)^2+d_2(x-x_2)^3, x\in[x_1;x_2],$$

$$P_2(x)=2+\frac{23}{15}(x-1)+\frac{7}{10}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3, x\in[x_1;x_2].$$

$$P_3(x)=a_3+b_3(x-x_3)+C_3(x-x_3)^2+d_3(x-x_3)^3, x\in[x_2;x_3],$$

$$P_3(x)=4+\frac{67}{30}(x-2)-\frac{7}{30}(x-2)^3, x\in[1;2]$$

Следовательно, сплайн S(x) построен:

$$S(x)=\begin{cases} P_1(x)=1+\frac{19}{30}x+\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{15}x^3, x\in[-1;0]; \\ P_2(x)=2+\frac{23}{15}(x-1)+\frac{7}{10}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3, x\in[0;1]; \\ P_3(x)=4+\frac{67}{30}(x-2)-\frac{7}{30}(x-2)^3, x\in[1;2]. \end{cases}$$

Найдем его значение при x=0,3:

Заметим, что $0{,}3\in[0;1]$, поэтому используем многочлен $P_2(x)$:

$$P(0.3)=2+\frac{23}{15}(0{,}3-1)+\frac{7}{10}(0{,}3-1)^2+\frac{1}{6}(0{,}3-1)^3=1{,}2125.$$

Интерполяция с помощью сплайнов требует значительных вычислительных усилий. Формат итогового результата также интересен, так как сплайн может иметь различные формы на разных участках интерполяции. Это усложняет процесс получения значений сплайна в определенных точках, поскольку необходимо сначала найти параметры, определяющие форму сплайна. Однако эти трудности можно легко преодолеть с помощью компьютера, поскольку организовать упорядоченное хранение всех необходимых параметров не составляет труда, а реализация однотипных вычислительных процедур для определения параметров сплайна и его значений может быть выполнена с помощью специальных алгоритмов.

Задания практического занятия[4]

Задание 1. По заданной таблице значений функции

x	*x*	*x1*	*x2*	*x3*	*x4*	*x5*
y	*y0*	*y1*	*y2*	*y3*	*y4*	*y5*

вычислить коэффициенты и составить формулы кубического сплайна.

Задание 2. Результат интерполирования проверить путем вычисления значений сплайна в узловых точках.

Задание 3. Составить программу вычисления значения функции в точке, используя интерполяцию сплайнами.

Задание 4.Сравнить полученные результаты

Номера узлов определить из таблицы по номеру варианта. Например, варианту 7 соответствуют узлы с номерами 1, 3, 6, 8, 10.

N узла	x	y
1	0,2	0,6
2	0,55	0,35
3	0,65	0,45
4	1,0	0,2
5	1,1	0,3
6	1,45	0,05
7	1,55	0,85
8	1,9	0,6
9	2,0	0,7
10	2,35	0,45

	1	**2**	**3**		1	3	5
4	**5**	**6**	**7**		1	3	6
8	**9**	**10**	**11**		1	4	5
12	**13**	**14**	**15**		1	4	6
16	**17**	**18**	**19**		2	3	5
20	**21**	**22**	**23**		2	3	6
24	**25**	**26**	**27**		2	4	5
28	**29**	**30**			2	4	6
7 9	7 10	8 9	8 10				

Контрольные вопросы:

1. В чем состоит задача интерполирования?
2. Какие виды интерполяции вы знаете?
3. Что такое сплайн-интерполяция и в чем ее суть?
4. Какие трудности возникают при интерполировании сплайнами?

8. Практическая работа №8.

Вычисление интегралов по формулам Ньютона - Котеса

Цель занятия:

- закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
- закрепить умения приближенно вычислять интегралы при помощи формул Ньютона-Котеса (формула прямоугольников, формула трапеций, формула парабол (Симпсона))

Краткие теоретические сведения

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a; b] и требуется вычислить определенный интеграл $I = \int_a^b f(x)dx.$[1]

Если определенный интеграл не удается выразить через элементарные функции или аналитический вид функции неизвестен, то применяют метод численного интегрирования. Процесс численного определения интеграла называется *квадратурой,* а соответствующие формулы *квадратурными формулами.*[1]

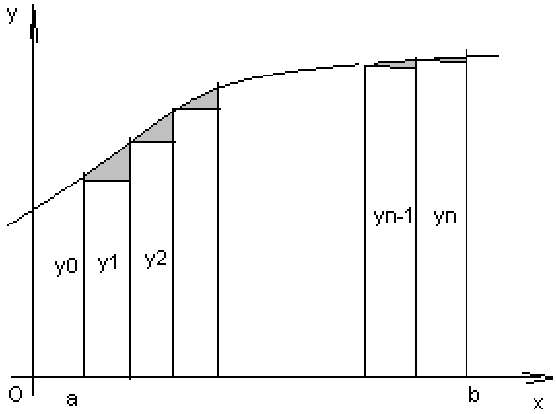
Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция f(x) заменяется на отрезке [a;b] интерполяционным многочленом Лагранжа *Ln(x)*, и тогда[1]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b Ln(x)dx \ .$$

Такой метод удобен тем, что приводит к алгоритмам, которые легко реализуются на компьютере и обеспечивают результаты с точностью, достаточной для множества практических задач.

Метод прямоугольников

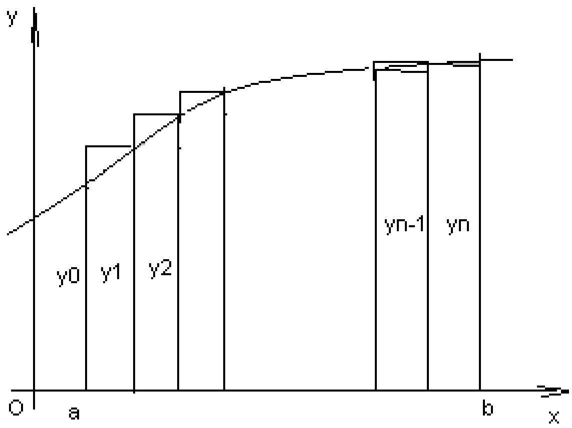
Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx,$ отрезок [a;b] разбивают на n криволинейную трапецию, заменяют прямоугольником с основанием $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, и высотой $y_0, y_1, ... y_n,$ соответственно.



Получаем формулу для нахождения определенного интеграла с недостатком

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}).$$

И формулу для вычисления определенного интеграла с избытком.



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + ... + y_n))$$

где значение

$$y_k = f(a + k \cdot \Delta x),\ k = \overline{0, n}.$$

Пример: Вычислить по формуле прямоугольников интеграл

$$\int_0^{\Pi/4} \cos x dx \quad \text{(n=5).}$$

Решение:

Имеем a=0, $b = \Pi/4$, $f(x) = \cos x$.Тогда $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{\Pi/4 - 0}{5} = \dfrac{\Pi}{20} \approx 0{,}157$

Вычислим значение функции по формуле $y_k = f(a + k \cdot \Delta x)$:

$$y_0 = f(a + 0 \cdot \Delta x) = \cos(0) = 1,$$

$$y_1 = f(a + 1 \cdot \Delta x) = \cos(0 + \frac{\Pi}{20}) = \cos\frac{\Pi}{20} \approx \cos 9^0 \approx 0{,}987,$$

$$y_2 = \cos(0 + 2 \cdot \frac{\Pi}{20}) = \cos\frac{\Pi}{10} = \cos 18^0 \approx 0{,}951,$$

$$y_3 = \cos(0 + 3 \cdot \frac{\Pi}{20}) = \cos\frac{3\Pi}{20} = \cos 27^0 \approx 0{,}891,$$

$$y_4 = \cos(0 + 4\frac{\Pi}{20}) = \cos\frac{\Pi}{5} = \cos 36^0 \approx 0{,}809.$$

Применяя формулу прямоугольника с недостатком получим

$$\int_0^{\Pi/4} \cos x dx = 0{,}157(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 0{,}157 \cdot (1 + 0{,}987 + 0{,}951 + 0{,}891 + 0{,}891) = 0{,}728$$

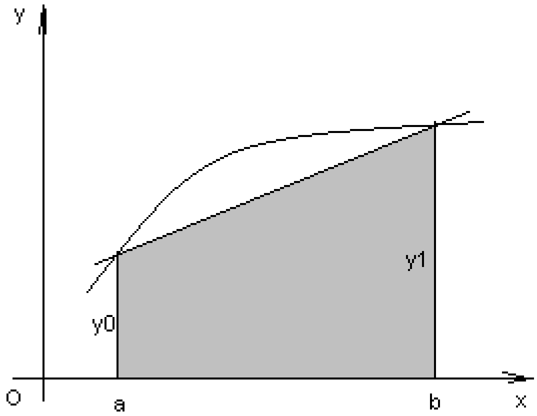
Вычислим данный интеграл по формуле Ньютона - Лейбница и сравним результаты:

$$\int_0^{\Pi/4} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\Pi/4} = \sin\frac{\Pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Относительная погрешность вычисления: $\Delta = \dfrac{(I_{точн} - I_{прибл})}{I_{точн}} \approx 0{,}029$.

Метод трапеций

Геометрический смысл этого метода практического вычисления определенного интеграла состоит в том, что нахождение площади криволинейной трапеции заменяется нахождением площади приблизительно равновеликой прямолинейной трапеции[1].



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2}(b-a)$$

Для повышения точности результата разобьём фигуру на n частей, а затем суммируем площади получившихся трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_1}{2} + \frac{y_1+y_2}{2} + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}, \quad \text{или}\right.$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

где $y_k = f(x_n) = f(a + k\Delta x), \quad k = \overline{0,n}$.

Формула называется *формулой трапеций.*

Пример: По формуле трапеции вычислить интеграл

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} \quad (n=5).$$

Решение: Имеем a=0, b=5, $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{5-0}{5} = 1$.

Вычислим промежуточные значения функции в узлах:

$$y_0 = y(0) = \frac{1}{\sqrt{0+4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5, \qquad y_1 = y(1) = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = 0{,}447,$$

$$y_2 = y(2) = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0{,}409, \qquad y_3 = y(3) = \frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0{,}377,$$

$$y_4 = y(4) = \frac{1}{\sqrt{8}} \approx 0{,}353, \qquad y_5 = y(5) = \frac{1}{\sqrt{9}} \approx 0{,}333.$$

Тогда по формуле трапеций (4.9) имеем:

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} \approx 1\left(\frac{0{,}5}{2} + 0{,}447 + 0{,}409 + 0{,}377 + 0{,}353 + \frac{0{,}3}{2}\right) \approx 2{,}002 .$$

Погрешность формулы трапеций Rравна:

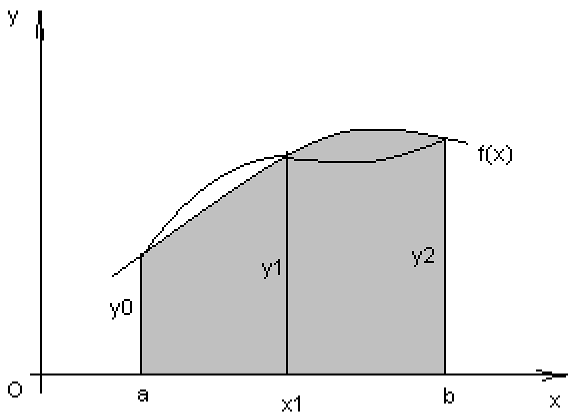
$$R = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot f''(\theta), \text{где } a < \theta < b.$$

Тогда оценка погрешности формулы будет иметь следующий вид:

$$|R| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2, \text{ где } M_2 = \max_{[a;b]} |f''(x)|.$$

Метод Симпсона (Метод парабол).

Замена подынтегральной функции f(x) параболой, проходящей через точки$M_i(x_i;\ y_i)$, (i=0,1,2) позволяет получать более точное значение определенного интеграла.



Если считать, что n - четное (n=2m), то получим:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{3}\left(\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + y_2 + ... + 2y_{2m-1}\right), \text{где } h = \frac{b-a}{n} .$$

Эта формула называется *формулой парабол или формулой Симпсона*.

Для оценки погрешности формулы Симпсона применяется формула

$$\max_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right| \cdot \frac{|b-a|h^4}{180} \le \varepsilon$$

Как следует из оценки, формула Симпсона, оказывается точной для многочленов до 3-ей степени включительно. Так как для этих случаев производная 4-го порядка равна 0.

Формула Симпсона обладает повышенной точностью по сравнению с формулой трапеций, это обозначает, что для достижения той же точности, что и в формуле трапеций, в ней можно брать меньшее число n - отрезков разбиения. Последнее обстоятельство весьма важно для вычислений. Поскольку основное время затрачивается на нахождение значений функции в узлах. Укажем простой практический прием, позволяющий прогнозировать требуемое число отрезков разбиения по заданной точности ε.

$$h \le \sqrt{\frac{180\varepsilon}{|b-a| \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right|}}$$

Пример: Вычислить интеграл по формуле парабол

$$\int_0^1 x^2 \sin x dx, \quad \text{(n=10)}.$$

Решение: Значения подынтегральной функции в узловых точках запишем в таблицу:

x_i	y_i
0	0
0,1	0,0019966
0,2	0,0079467
0,3	0,0531936
0,4	0,0623068
0,5	0,2397124
0,6	0,2032711
0,7	0,6313333
0,8	0,4591078
0,9	1,2689896
1	0,841478

Подставим найденные значения в формулу Симпсона, учитывая, что h=0,1:

$$\int_0^1 x^2 \sin x dx \approx \frac{2 \cdot 0{,}1}{3}\left(\frac{0+0{,}841471}{2} + 2 \cdot 0{,}0019966 + 0{,}0079467 + 2 \cdot 0{,}0531936 + 0{,}0623068 + \right.$$

$$\left. + 2 \cdot 0{,}2397124 + 0{,}2032711 + 2 \cdot 0{,}6313333 + 0{,}4591078 + 2 \cdot 1{,}2689896\right) \approx 0{,}2232395$$

В данном случае легко вычислить «точное» значение этого интеграла, пользуясь формулой Ньютона - Лейбница

$$\int_0^1 x^2 \sin x dx = 2\sin 1 + \cos 1 - 2 = 0{,}223244275 .$$

Как видим, результат, полученный с помощью приближенной формулы парабол, дает высокую точность.

Задания практического занятия

Задание 1.

1) Вычислить интеграл $I = \int_a^b f(t)dt$ методом средних прямоугольников с точностью 0,001. Предварительно определить число частей разбиения отрезка [a,b] на основе априорной оценки.

2) Вычислить этот же интеграл методом Трапеций при n = 16. Произвести оценку вычислений.

3) Вычислить этот же интеграл методом Симпсона при n = 16. Произвести оценку точности полученного значения путем двойного просчета.

Сравнить точность полученных результатов.

Задание 2.

С помощью программ на компьютере вычислить значение интеграла заданной функции на отрезке [$a;b$]:

1) по формуле прямоугольников;

2) по формуле трапеций;

3) по формуле Симпсона

						a	b
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	1,0	2,2
	6	**7**	**8**	**9**	**10**	2,2	3,4
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	3,4	4,6
	16	**17**	**18**	**19**	**20**	4,6	5,8
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	5,8	7,0
	26	**27**	**28**	**29**	**30**	7,0	8,2
f(x)	tg(sin x)	$\sqrt{x^5+1}$	$\frac{50-9x}{\sqrt{12-x}}$	$\sqrt{1+3x^4}$	$\frac{10+x^3}{\sqrt{x+1}}$		

Контрольные вопросы

1. В каких случаях формула Ньютона-Котеса может быть неэффективной для вычисления определенного интеграла?

2. В чем заключается преимущество формулы Симпсона по сравнению с формулой трапеций?

3. Каким образом можно определить необходимое количество разбиений при использовании формулы парабол для достижения заданной точности интеграции?

9. Практическая работа №9.
Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель занятия:

- Углубить понимание теоретических аспектов данной темы путем выполнения практических заданий;
- Овладеть навыками приближенногонахождениярешения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с использованием метода Эйлера, метода Рунге-Кутта.

Краткие теоретические сведения

Аналитическое решение дифференциального уравнения часто оказывается неэффективным, поскольку приводит к результату в интегральной форме, что затрудняет дальнейшее использование функции в таком виде. Поэтому на практике для решения дифференциальных уравнений применяются численные методы. Рассмотрим ряд численных методов решения дифференциальных уравнений, сосредоточив внимание на уравнениях первого порядка.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$(1) \qquad y' = f(x,y)$$

с начальным условием

$$(2) \qquad y(x_0) = y_0.$$

Требуется найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) и условию (2) на некотором отрезке [a; b][1].

Решение уравнения (1) численными методами может быть получено в виде таблицы. К недостаткам численных методов относится то, что с их помощью можно получить лишь частное решение. Достоинством численных методов является их универсальность.

Метод Эйлера.

Пусть имеется система равноотстоящих точек $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$.

Получение таблицы значений искомой функции y(x) по методу Эйлера заключается в циклическом применении формулы $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + hf(x_i, y_i)$

Усовершенствованный метод Эйлера. Идея усовершенствованного метода Эйлера состоит в том, чтобы заменить этот интеграл на величину *h*, умноженную на значение *f* в среднейточке отрезка интегрирования.

Формула $y_{i+1} = y_{i-1} + \Delta y_i = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i)$ определяет основу алгоритма уточненного метода Эйлера. Она применима лишь для i > 1, так как значение yi по ним получить нельзя. В этом случае значение yi находят с помощью обычного метода Эйлера. При этом в целях получения более точных результатов поступают следующим образом[1].

Сначала по формуле $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + hf(x_i, y_i)$ вычисляется значение $y_{1/2}$ в точке $x_{1/2} = x_0 + \frac{h}{2}$ т.е. $y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0; y_0)$, а затем находится y_1 по формуле $y_{i+1} = y_{i-1} + \Delta y_i = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i)$ с шагом h/2: $y_1 = y_0 + hf(x_{1/2}; y_{1/2})$ [1]

Метод Рунге-Кутта[1]

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4)$$

Где

$$r_1 = h(x_i; y_i)$$

$$r_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}; yi + \frac{r_1}{2})$$

$$r_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{r_2}{2})$$

$$r_4 = hf(x_i + h; y_i + r_3)$$

Метод Рунге-Кутта дает обычно достаточную точность при не очень мелком шаге.

Оценка погрешности

Оценка точности рассмотренных методов на этапе априорного анализа является достаточно сложной задачей. На практике часто используется грубая оценка погрешности, которая вычисляется с помощью второго просчета. Этот процесс выполняется следующим образом: пусть y_mи y_m^* представляют собой два решения, полученные определенным численным методом с шагом интегрирования $\frac{h}{2}$ и h соответственно. Тогда можно оценить погрешность более точного решения в каждой четной узловой точке с помощью соответствующей величины.

(5) $\Delta y_m = c \cdot \left| y_m - y_m^* \right|$, где c – константа, зависящая от выбора метода.

Пример: Дано уравнение $y'=xy$; $y(0)=1$; решить его при $x \in [0;1]$.

Проведем расчеты обоими методами с помощью ЭВМ. Полученные результаты округленные до четырех знаков после запятой (в последней строке оставим побольше знаков), сведем в одну таблицу:

x	Усовершенствованный метод Эйлера		Метод Рунге-Кутта	
	h=0,1	h=0,05	h=0,l	h=0,05
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,05		1,0013		1,0013
0,1	1,0050	1,0050	1,0050	1,0050
0,15		1,0113		1,0113
0,2	1,0202	1,0202	1,0202	1,0202
0,25		1,0317		1,0317
0,3	1,0459	1,0460	1,0460	1,0460
0,35		1,0631		1,0632
0,4	1,0831	1,0832	1,0833	1,0833
0,45		1,1065		1,1066
0,5	1,1328	1,1331	1,1331	1,1331
0,55		1,1632		1,1633
0,6	1,1966	1,1971	1,1972	1,1972
0,65		1,2350		1,2352
0,7	1,2768	1,2774	1,2776	1,2776
0,75		1,3245		1,3248
0,8	1,3759	1,3768	1,3771	1,3771
0,85		1,4347		1,4351
0,9	1,4975	1,4988	1,4993	1,4993
0,95		1,5697		1,5703
10,0	1,64615016	1,64805655	1,64872101	1,644872126

Из формулы (5) получаем:

Для усовершенствованного метода Эйлера:

$\Delta y(1)$=0,00064$y(1)$=1,64806±0,00065

Для метода Рунге-Кутта:

$\Delta y(1)=0{,}000000017 y(1)=1{,}64872126\pm 0{,}00000002$

Задания практического занятия

Задание 1.

1. Решить дифференциальное уравнение с заданным начальным условием методом Эйлера и усовершенствованным методом Эйлера

a) с применением «ручных» вычислений.

b) с помощью программы для компьютера

Расчет провести на отрезке [c,d] дважды: с шагом 0,1 и 0,05.

2. Свести результаты вычислений в одну таблицу и сопоставить точность полученных значений функции. Пользуясь таблицей, сделать ручную прикидку графика интегральной кривой на бумаге.

Задание 2

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения y'=f(x,y) на отрезке [a;b] при заданном начальном условии $y(a)=y_0$ методом Рунге-Кутта с помощью программы для компьютера с шагом h и с шагом h/2.

На основе результатов двойного счета сделать вывод о точности полученного решения.

Данные взять из таблицы соответственно номеру варианта.

1. $y'=0{,}133\cdot(x^2+\sin 2x)+0{,}872y$ $x\in[0{,}2;\ 1{,}2];\ y(0{,}2)=0{,}25$	**2.** $y'=0{,}215\cdot(x^2+\cos 1{,}5x)+1{,}283y$ $x\in[0{,}2;\ 1{,}2];\ y(0{,}2)=0{,}25$
3. $y'=2x+y^2$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0{,}3$	**4.** $y'=x^2+xy$ $x\in[0;1];\ y(0)=0{,}2$
5. $y'=1+0{,}2y\cdot\sin x-y^2$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0$	**6.** $y'=(1-y^2)\cdot\cos x+0{,}6y$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0$
7. $y'=\cos(x+y)+0{,}5(x-y)$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0$	**8.** $y'=1+0{,}4y\cdot\sin x-1{,}5y^2$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0$
9. $y'=\cos(1{,}5x+y)+(x-y)$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0$	**10.** $y'=x+\cos(y/3{,}16)$ $x\in[0{,}6;\ 1{,}6];\ y(0{,}6)=0{,}8$
11. $y'=0{,}158\cdot(x^2+\sin 0{,}8x)+1{,}164y$ $x\in[0{,}2;\ 1{,}2];\ y(0{,}.2)=0{,}25$	**12.** $y'=0{,}173\cdot(x^2+\cos 0{,}7x)+0{,}754y$ $x\in[0{,}2;\ 1{,}2];\ y(0{,}2)=0{,}25$
13. $y'=0{,}2x+y^2$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0{,}1$	**14.** $y'=x^2+y$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0{,}4$
15. $y'=\cos(2x+y)+1{,}5(x-y)$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0$	**16.** $y'=1+0{,}8y\cdot\sin x-2y^2$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0$
17. $y'=\cos(1{,}5x+y)+1{,}5(x-y)$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0$	**18.** $y'=1+(1-x)\cdot\sin y-(2+x)y$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0$

19. $y' = 1+2{,}2\cdot\sin x - 1{,}5y^2$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0$	**20.** $y' = x + \cos(y/3{,}14)$ $x\in[1{,}7;\ 2{,}7];\ y(1{,}7)=5{,}3$
21. $y' = 0{,}221\cdot(x^2 + \sin 1{,}2x) + 0{,}452y$ $x\in[0{,}2;\ 1{,}2];\ y(0{,}2)=0{,}25$	**22.** $y' = 0{,}163\cdot(x^2 + \cos 0{,}4x) + 0{,}635y$ $x\in[0{,}2;\ 1{,}2];\ y(0{,}2)=0{,}25$
23. $y' = x^2 + 2y$ $x\in[0{,}1;];\ y(0)=0$	**24.** $y' = x\,y + y^2$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0{,}6$
25. $y' = \cos(x + y) + 0{,}75(x - y)$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0$	**26.** $y' = (0{,}8 - y^2)\cdot\cos x + 0{,}3y$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0$
27. $y' = \cos(1{,}5 + y) + 2{,}25(x + y)$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0$	**28.** $y' = 1 + (x-1)\cdot\sin y + 2(x + y)$ $x\in[0;\ 1];\ y(0)=0$
29. $y' = 0{,}6\cdot\sin x - 1{,}25y^2 + 1$ $x\in[0;\ 1];\ y(0) = 0$	**30**. $y' = x + \sin(y/3{,}9)$ $x\in[0{,}2;\ 1{,}2];\ y(0{,}2)=1{,}1$

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой решение дифференциального уравнения?
2. На какие категориделятся приближенные методы решения дифференциальных уравнений?
3. В какой форме получается приближенное решение дифференциального уравнения по методу Эйлера?
4. Какова основная концепция метода Рунге-Кутта?
5. Чем различаются одношаговые методы Эйлера и Рунге-Кутта?

Список литературы

1. Каверина И.А.Численные методы (Excel). Учебно-методическое пособие, подразделение «Балашиха», 2021, -85с.
2. Лапчик М.П. Численные методы: учебник / М.П.Лапчик, М.И.Рагулина, Е.К.Хеннер; под редМ.П.Лапчика. – 3 изд, стер. - М.:Образовательно-издательский центр «Академия», 2024, 256 с
3. Локтионов, И. К. Численные методы: учебник / И. К. Локтионов, Л. П. Мироненко, В. В. Турупалов. — Вологда: Инфра-Инженерия, 2022. — 380 с
4. Моя страничка в образовательной социальной сети https://nsportal.ru/npo-spo/informatika-i-vychislitelnaya-tekhnika/library/2013/04/11/priblizhennye-chisla-i-deystviya
5. Численные методы анализа : методические указания / сост. :А.Н. Пахомов, Ю.В. Пахомова. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ,2010 – 32 с. – 50 экз.
6. Учебное пособие: Пособие MathCAD**https://bestreferat.ru/referat-287318.html**
7. ExcelTABLEработа с таблицами - режим доступа: https://exceltable.com/uroki-excel/samouchitel-excel-s-primerami